Title	連立代数方程式の解の重複度(精度保証付き数値計算法とその応用)
Author(s)	小林, 英恒; 鈴木, 秀男
Citation	数理解析研究所講究録 (1993), 831: 1-20
Issue Date	1993-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/83378
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
831巻 1993年 1-20

連立代数方程式の解の重複度

日大・小林　英恒　東京職業訓練短大・鈴木　秀男
(Kobayashi, Hidetsune)　　　(Suzuki, Hideo)

連立代数方程式の解の重複度を数値計算によって求める方法を示す。解の重複度を連立代数方程式から自然に決まる、代数的対応の重複度に翻訳し、これをゾイタンの法則に当てはめて計算する。

この報告の１節では、自然な代数的対応関係を定義し、Ｚｅｕｔｈｅｎの法則を用いて解の重複度を求める方法について述べる。２節では、数値計算の方法について簡単に述べ、３節で計算例を紹介する。

１．Ｚｅｕｔｈｅｎの法則と解の重複度

まず、簡単に代数的対応について紹介する。$f(x, y)$ を x について n 次，y について m 次の多項式とする。a を一つの複素数とするとき、

$$f(a, y) = 0 \qquad ①$$

の解が $\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ であるとすると、a に $\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ を対応させる対応関係を代数的対応という。a に m 個の数が対応し、逆に b に n 個の数が対応することからこの代数的対応は (n, m) 対応であるという。a に対応する数のうちに a 自身が含まれれば

$$f(a, a) = 0 \qquad ②$$

となる。従って、このような数は、$n + m$ 個存在する。空間の点の代数的対応に関しては［1］を参照されたい。

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

$$f_i \in C[x_1, x_2, \cdots, x_n] \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad ③$$

を与えられた連立代数方程式とする。

$$F_i(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_0^{\deg f_i} f_i(x_1/x_0, x_2/x_0, \cdots, x_n/x_0), \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad ④$$

とおいて斉次化することによって、以下の議論はすべてn次元射影空間ですすめる、このようにおくときBezoutの定理により解の個数は、方程式を与える多項式の次数の積となり、理論を進めるのが簡単となる。また、元の方程式の解は無限遠解ではなく、重複度は元のそれと変わらない。

以下記号［r］はr次元linear spaceを表す。つまり、［r］は独立なn－r個の超平面の交わりのことである。まず、重複度を調べるための道具となる代数的対応を作ることから始める。超曲面$f_1 = 0$をFとおき、曲線$f_2 = f_3 = \cdots = f_n = 0$をCとおく。FにもCにものらない一般の点Oを取る。C上の点Pが与えられたとき、OPとFとの交点の一つをQ、直線OPをlとおき、

（P，Q； l）

の全体をΣ_1とおくと、Σ_1は代数的対応関係P→Qを定める。この対応関係の指標（α，β；γ）は、次のように定義される。

α：［n－1］を与えたとき，P∈［n－1］なる
（P，Q； l）$\in \Sigma_1$の個数

β：［n－1］を与えたとき，Q∈［n－1］なる
（P，Q； l）$\in \Sigma_1$の個数

γ：［n－2］を与えたとき，l∩［n－2］$\neq \phi$なる
（P，Q； l）$\in \Sigma_1$の個数

$\deg f_i = d_i$とおくとき、次の命題が成立する。

命題　$\alpha=\beta=\gamma=d_1d_2\cdots d_n$ である．

証明　Cのorderは $d_2d_3\cdots d_n$ であるから、[$n-1$]との交点は $d_2d_3\cdots d_n$ である。この交点のうちの一つをPとおくとき、OPとFとの交点はFのorderが d_1 であることから、d_1 個である。よって、$(P, Q; l)\in\Sigma_1$ は $d_1d_2\cdots d_n$ 個だから、$\alpha=d_1d_2\cdots d_n$

[$n-1$]とFとの交わりはorder　d_1 の代数多様体で、これを底としPを頂点とする錐とCとの交点は $d_1d_2\cdots d_n$ である．よって、$Q\in[n-1]$ なる $(P, Q; l)\in\Sigma_1$ の個数は $d_1d_2\cdots d_n$ であるから、$\beta=d_1d_2\cdots d_n$

[$n-2$]を勝手に与えたとき、$l\cap[n-2]\neq\phi$ とする。$O\in l$ で，$O\in[n-2]$ としてよいから、結局 l は超平面 $O\vee[n-2]$ に含まれることになる。$O\vee[n-2]\ni P$ なる $(P, Q; l)\in\Sigma_1$ の個数は $d_1d_2\cdots d_n$ だから、$\gamma=d_1d_2\cdots d_n$ □

定理　Σ_1 の指標が $(\alpha, \beta; \gamma)$ のとき、$P=Q$ となる $(P, Q; l)\in\Sigma_1$ の個数は、$\alpha+\beta-\gamma$ である。

証明　一般の位置に[$n-2$]をとり、これを H' とおく。H' を通る[$n-1$]に対し、$(P, Q; l)$ を $P\in[n-1]$ ととり、これに $Q\vee H'$ を対応させると H' を通る超平面の束の代数的対応が出来る。H' を通る超平面の束は、一つのパラメタで表示できるから、この代数的対応は、複素数の対応と思って良い。

一つの[$n-1$]を与えると，$P\in[n-1]$ なる $(P, Q; l)\in\Sigma_1$ の個数は α で、この α 個のQをとおる $[n-1]=Q\vee H'$ が最初の[$n-1$]に対応する。このことをもう一度繰り返して考えると、この数の対応は、(β, α) 対応となる。従って一致する

超平面の個数は$\alpha+\beta$個である。

他方、H'をとおる［n－1］に同じ［n－1］が対応するのは、（P，Q；l）に於いてP＝Qのときかl∩H'≠ϕのときである。よって、P＝Qとなるのは、

$\alpha+\beta-\gamma$個

である。□

P＝Qとなる（P，Q；l）の個数は、連立代数方程式の解の数に等しい。従って、上の定理を与えられた連立代数方程式によって定義される代数的対応に適用することにより次の系を得る。

系　上の対応関係で重複度をいれて考えれば，解の個数はちょうど$d_1d_2\cdots d_n$となる。

上の定理の証明を見れば、超平面の束の対応関係の重複度を、連立代数方程式の解の重複度と定義すれば良いことが分かる。すなわち、uを連立代数方程式の一つの根とするとき、［n－2］∨u上には、他の連立代数方程式の解が無く、かつP→uのときの極限の（P，Q；l）のlが乗っていないように［n－2］を適当に選び、代数的対応関係Σから決まる超平面の束の対応関係の点uに関する部分の重複度を調べれば、超平面の束の対応関係の重複度と根uの重複度が一致する。ここで、［n－2］を一般の位置に選びさえすれば、連続性により、選び方によって重複度が変わることはない。

次に、数の代数的対応関係の重複度を調べるためのZeuthenの法則を示す。

定理　(Zeuthen's Rule)

ある代数的対応が与えられたとする。x に対応する $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ のうち、$\{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$ が、$x \to a$ なら $y_1, y_2, \cdots, y_s \to a$ となるとき、点 a の重複度は、$y_1 - x$, $y_2 - x$, $\cdots$, $y_s - x$ の無限小の程度を、無限小 $x - a$ を基準に測った値の和に等しい。([1], P. 70)

この法則を適用するためには、連立代数方程式の解 u をとおる一般の位置にある直線を一本引きこれを固定する。点 u をこの直線の原点と思うことにする。原点から距離 h の直線上の点 G と一般に取られた $[n-2]$ とで、生成される超平面と曲線 C との交点のうち u に近いものを全て求める。どの範囲のものを全て求めるかは、次の節で述べるとして、いまこれらの点を $P_1, P_2, \cdots, P_r$ とおく。各 $P_i O$ と F との交点を Q_{ij} とし、$Q_{ij} \vee [n-2]$ が固定された直線と交わる点と点 G の間の距離を q_{ij} とするとき、$h^{\alpha_{ij}} = c\,|q_{ij}|$ となる α_{ij} を求めて、それらをすべて加えれば重複度が得られる。ここに、c は h, q_{ij} に関係しない定数であり、2つの h を考えることにより除去できる。

2. 重複度の計算アルゴリズム

この節では、連立代数方程式の解を求め、それの重複度を求めるために用いた方法を紹介する。今回は、4変数以下の連立代数方程式について、その重複度を求めたので、ここでは4変数の場合を例にとり説明する。

$$\left.\begin{aligned} c_1 &: f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ c_2 &: f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ c_3 &: f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ c_4 &: f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \end{aligned}\right\} \quad ⑤$$

1）超曲面c_1, c_2, c_3, c_4の交点$u=(u_1, u_2, u_3, u_4)$を求める。すなわち、与えられた連立代数方程式の根を求める。

【手法】

＜数式処理による式の導出＞

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{pmatrix} \quad ⑥$$

とおき、次の形のホモトピーを作る。

$$H_i = (1-\lambda)(x_i^{d_i} - b_i) + \lambda f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$+ \lambda(1-\lambda)\sum_{j=1}^{4} a_{j,i} x_i^{d_i} \quad ⑦$$

として

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) = \begin{pmatrix} H_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) \\ H_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) \\ H_3(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) \\ H_4(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) \end{pmatrix} \quad ⑧$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} & d_i = \deg f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad i=1,2,3,4 \\ & (b_1, b_2, b_3, b_4) \in C^4, \\ & (a_{1,k}, a_{2,k}, a_{3,k}, a_{4,k}) \in C^4 \qquad k=1,2,3,4 \end{aligned}\right\} \quad ⑨$$

もとの連立代数方程式⑤式を満たす根は、⑧式で表現されるパスを追跡することにより得られる。このパスの追跡は、$\lambda=0$の

点を初期値とし、$\lambda=1$まで行う。ここではパスを追跡するために、次に示すような微分方程式を作る。

$v=(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda)\in C^4\times[0, 1]$とするとき

$$\left(\frac{dv}{ds}\right)=k\begin{pmatrix}\dfrac{dw}{ds}\\ 1\end{pmatrix} \qquad ⑩$$

ここで、sはパスに沿った弧長であり、kは$|dv/ds|=1$となるように選ぶ。

また⑩式の右辺は次の連立1次方程式より得られる。

$$J_w(dw/ds)+J_t=0 \qquad ⑪$$

ここで、J_w, J_tは、次式により与えられる。

$DH=[J_w, J_t]$：Hのヤコビアン　⑫

このようにして、もとの代数方程式の交点を求める問題は、微分方程式を解く問題に帰着される。この微分方程式は、関数副プログラムとして数式処理で作成する。

＜数値計算による数値積分＞

以上の⑤～⑫までの式をあらかじめ数式処理で作成しておく。ここでは、実際にパスを追跡するための方法を示す。

(1). パス追跡のための初期値、すなわち$\lambda=0$での⑧式の根を求める。⑧式で$\lambda=0$とおくと各成分は1変数の代数方程式に帰着される。したがって、この解法にはニュートン法を使用する

(2). パスを追跡し$\lambda=1$での近似解を求める。

⑫式よりDHを計算し、この要素を分割して連立1次方程式を解く。このようにして得られた値を用いて、⑩式の微分方程式を解く。これには、高次の予測子－修正子法を使用する。

(3). 近似解を修正し、厳密解を求める。

$\lambda=1$での近似解が得られているので、多変数のニュートン法を用いることにより、より精度の高い解を得る。

このようにして得られた解の一つをuとおく。

2）［4－2］と直交し、uを通る直線l_0を決める。

3）［4－2］を与えるため空間内の3点$xyz_1=(x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41})$と$xyz_2=(x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42})$と$xyz_3=(x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43})$とを与える。実際問題この与えた［4－2］が一般の位置にあるかどうかは、試さなくても良いほどであるが、念のため［4－2］∪u上に他の解が乗っていないことをためす。解が乗っていれば、最初に与えられた3点を適当にずらして解が乗っているかどうか再度確認する。

4）交点$u=(u_1, u_2, u_3, u_4)$を少しずらした点（ずらす幅を$h=(h_1, h_2, h_3, h_4)$で与える）と3）の［4－2］とで生成される［3］を決定する。この場合［3］とは、xyz_1, xyz_2, xyz_3および$u+h$とで生成される超平面であり、$g(x_1, x_2, x_3, x_4)=g_1x_1+g_2x_2+g_3x_3+g_4x_4+g_5=0$となる。すなわち、$g(x_1, x_2, x_3, x_4)$の係数$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$を求める。

5）4）で決定された［3］と曲線$f_2=f_3=f_4=0$との交点$p_i=(p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4})$, $i=1, \cdots, n_p$を求める。ただし、$u+h\rightarrow u$のとき各$p_i\rightarrow u$となる点のみ考える。

【手法】

I．$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$，$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$，$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$，$g(x_1, x_2, x_3, x_4)=g_1x_1+g_2x_2+g_3x_3+g_4x_4+g_5=0$より$x_1$を消去する。

<数式処理による式の変形>

超平面の方程式$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 + g_4x_4 + g_5 = 0$を次のように変形する。

$x_1 = -(g_2x_2 + g_3x_3 + g_4x_4 + g_5)/g_1$ ⑬

これを$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, $f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$へ代入し$x_1$を消去する。

$f_2(-(g_2x_2 + g_3x_3 + g_4x_4 + g_5)/g_1, x_2, x_3, x_4)$

$= f_{2n}(x_2, x_3, x_4) = 0$ ⑭

$f_3(-(g_2x_2 + g_3x_3 + g_4x_4 + g_5)/g_1, x_2, x_3, x_4)$

$= f_{3n}(x_2, x_3, x_4) = 0$ ⑮

$f_4(-(g_2x_2 + g_3x_3 + g_4x_4 + g_5)/g_1, x_2, x_3, x_4)$

$= f_{4n}(x_2, x_3, x_4) = 0$ ⑯

したがって、$f_{2n}(x_2, x_3, x_4) = 0$, $f_{3n}(x_2, x_3, x_4) = 0$, $f_{4n}(x_2, x_3, x_4) = 0$を解くことを考える。

Ⅱ. $f_{2n}(x_2, x_3, x_4) = 0$, $f_{3n}(x_2, x_3, x_4) = 0$, $f_{4n}(x_2, x_3, x_4) = 0$をホモトピー接続法により与えられた範囲内に存在する全ての交点を求める。

このとき$u + h \to u$のときの$p \to u$の見きわめ方として、次の2つの性質を利用することができる。

性質1：近接する2つの$h_1 > h_2$をとり対応する点のuからの距離がuへ近づくものを採用すればよい。

∵uに十分近い場所で考えていることより明らか。

性質2：ある一定値を定めそれより遠くにある点は除く。具体的には、

$h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$, $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$,

$\deg(f_i) = d_i$, $i = 2, 3, 4$に対して

$|x_1 - u_1| < c\,|h_1 - u_1|$ ⑰

$$|x_2-u_2|<c\,|h_1-u_1|^{1/d_2d_3d_4} \qquad ⑱$$

$$|x_3-u_3|<c\,|h_1-u_1|^{1/d_2d_3d_4} \qquad ⑲$$

$$|x_4-u_4|<c\,|h_1-u_1|^{1/d_2d_3d_4} \qquad ⑳$$

∵ uのまらりでpuiseux展開を行うことにより得られる。

6）点oを曲線上にも，曲面上にもないように取り，直線op_iと曲面$f_1=0$との交点Q_{ij}，$j=1,\cdots,n_q$を求める。ただし、$u+h\rightarrow u$のとき各$Q_{ij}\rightarrow u$となる点のみ考える。

【手法】

<数式処理による式の変形>

点$o=(o_1, o_2, o_3, o_4)$と点$p_i=(p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4})$を通る直線は、

$$\frac{x_1-o_1}{p_{i1}-o_1}=\frac{x_2-o_2}{p_{i2}-o_2}=\frac{x_3-o_3}{p_{i3}-o_3}=\frac{x_4-o_4}{p_{i4}-o_4} \qquad ㉑$$

で表されるからx_1, x_2, x_3をx_4で表現すると次のようになる。

$$x_1=\frac{x_4-o_4}{p_{i4}-o_4}(p_{i1}-o_1)+o_1 \qquad ㉒$$

$$x_2=\frac{x_4-o_4}{p_{i4}-o_4}(p_{i2}-o_2)+o_2 \qquad ㉓$$

$$x_3=\frac{x_4-o_4}{p_{i4}-o_4}(p_{i3}-o_3)+o_3 \qquad ㉔$$

これを、$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$へ代入することにより$x_4$についての1変数代数方程式を導くことができる。

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)=f_1'(x_4)=0 \qquad ㉕$$

$f_1'(x_4)=0$のx_4に対する各係数を、サブルーチン副プロ

グラムとして数式処理で作成する。

<数値計算によるQ_{ij}の計算>

ニュートン法により、与えられた係数を持つような代数方程式を解きx_{4k}，$k=1, \cdots, n'$を求める。このx_{4k}を㉒式、㉓式、㉔式へ代入することによりx_1, x_2, x_3の値を得る。

これで、Q_{ij}が求まったことになる。

このとき$u+h \to u$のときの$Q_{ij} \to u$の見きわめ方として、次の性質を利用することができる。

性質3：近接する2つの$h_1 > h_2$をとり対応する点のuからの距離がuへ近づくかどうか調べる。

7）（［4－2］$\vee Q_{ij}$）$\cap l_0$とhとの距離をq_{ij}とおいたとき

$$h^{\alpha_{ij}} = c\,|q_{ij}| \qquad ㉖$$

を満たすα_{ij}を求める。

次にhを変えて同様にαを求め、前の値と比較して、定数cを除去する。除去した後の指数の総和が求める重複度となる。

ここで、未知定数cを除去するための方法として、次の性質をを利用することができる。

性質4：cの影響を除くためh_1, h_2の2つの値に対しp，qを求め次式によりαを修正することができる。ここで、$\sim^{(1)}, \sim^{(2)}$はそれぞれh_1, h_2に対応した値であることを意味する。

$$\alpha_{ij} = \frac{\log q_{ij}^{(1)} - \log q_{ij}^{(2)}}{\log|h_1| - \log|h_2|} \qquad ㉗$$

∵2つのhに対しそれぞれ成り立つ㉖式において、対数を取りその差を考えることにより得られる。

さらに誤差については、次の性質が成り立つ。

性質４：ｕは一般には単根とは限らないからｈは誤差を含む。この誤差をΔｈとおくと、$\alpha = \log q / \log (h + \Delta h)$となる。$\log (h + \Delta h) = \log h + \Delta h / h + \cdots$であるからｐ→ｕならＱ→ｕとなる点ｐ，Ｑでは、$\log q$，$\log h$は共にある程度大きな数になる。しかし、一般にΔｈ≪ｈであるからΔｈ／ｈは小さな数になる。従って、指数α_{ij}には、さほど影響を与えない。

また、ｈ→ｕでもｐ→ｕとならない点での指数α_{ij}は、殆ど全ての場合非常に小さな数となる。なぜならこのときｑはｕｐと同程度かそれ以上となるため$\log q / \log h$は非常に小さな数となる。従って、このような不要な点を一緒に計算しても、結果には殆ど影響してこない。

３．計算の例

４変数の連立代数方程式の解の重複度を前節の方法により求めたので、以下に例題を示す。

例題１．４変数２次の連立代数方程式の重複度

$f_1=-u^2+ux-uy+uz+2x^2-xy-xz-2y^2+2yz+z^2$

$f_2=-2u^2-2ux+uy-2uz-2x^2-xy+xz+y^2-yz+z^2$

$f_3=2u^2+2ux-uy+uz+2x^2+2xy-2xz-y^2+yz-2z^2$

$f_4=u^2-ux+2uy+uz+x^2+xy-xz+2y^2+2yz-2z^2$

の根（０，０，０）の重複度を求める。各ｈに対するｐ点とｑ点の関係は表１，２のようになる。これより合計を求めれば重複度が得られる。さらに、ｈを数種類変えたときの重複度を表３に示した。

これよりわかるように、この問題の重複度は１６になっている。なお計算は富士通ＶＰＸ－１２０を使用し（以下の問題に対しても同様）、計算時間は各ｈに対して約１．５秒であった。

表１．ｈ＝０．０１に対する重複度

	q_1	q_2	sum
p_1	1.008407	0.8836393	1.892047
p_2	0.4137549	0.8723248	1.286080
p_3	1.210117	0.9226413	2.132759
p_4	1.008407	0.8836393	1.892047
p_5	1.210117	0.9226413	2.132759
p_6	1.627733	0.8121411	2.439874
p_7	1.172135	0.9250014	2.097137
p_8	1.172135	0.9250014	2.097137
total			15.96984

表２．ｈ＝０．００９５に対する重複度

	q_1	q_2	sum
p_1	1.008326	0.8852080	1.893534
p_2	0.4218947	0.8736461	1.295541
p_3	1.207869	0.9236194	2.131489
p_4	1.008326	0.8852080	1.893534
p_5	1.207869	0.9236194	2.131489
p_6	1.620919	0.8145692	2.435488
p_7	1.170298	0.9259045	2.096202
p_8	1.170298	0.9259045	2.096202
total			15.97348

表３．ｈに対する重複度

h	0.01	0.0095	0.001	0.00095
重複度	15.96984	15.97348	16.01897	16.01904

例題２．４変数３次の連立代数方程式の重複度

$$f_1=-2u^3+2u^2x-u^2y+u^2z+2u^2+ux^2+uxy+2uxz-2ux+uy^2-2uyz-2uy+2uz^2+uz+x^3+2x^2y+x^2z-2x^2-2xy^2-xyz+xy-xz^2-2xz+2y^3-y^2z-y^2-2yz^2-yz-z^3-z^2$$

$$f_2=2u^3+2u^2x+u^2y+2u^2z-2u^2+ux^2+2uxy-uxz-ux-uy^2-2uyz-uy-uz^2-uz-x^3-x^2y-2x^2z-2x^2+2xy^2-xyz+2xy+2xz^2-xz-y^3-2y^2z+2y^2-yz^2+2yz+2z^3+2z^2$$

$$f_3=-u^3-2u^2x+2u^2y+u^2z-2u^2+ux^2-uxy-uxz+ux+uy^2+uyz+2uy-uz^2+2uz^2+2uz-x^3-2x^2y+2x^2z-x^2+xy^2+2xyz+xy+2xz^2-2xz-2y^3-y^2z+y^2-yz^2+2yz+z^3+z^2$$

$$f_4=u^3+u^2x-2u^2y-2u^2z+u^2-2ux^2+uxy-2uxz+2ux+2uy^2+uyz-uy-uz^2+2uz-x^3-2x^2y+x^2z-x^2-2xy^2+2xyz+2xy-2xz^2-2xz+2y^3-2y^2z-y^2+yz^2-yz+z^3+z^2$$

の根（０，０，０）の重複度を求める。各ｈに対するｐ点とｑ点の関係は表４，５のようになる。これより合計を求めれば重複度が得られる。さらに、ｈを数種類変えたときの重複度を表６に示した。これよりわかるように、この問題の重複度は１６になっている。なお計算時間は各ｈに対して約１５秒であった。

表４．ｈ＝０．０１に対する重複度

	q_1	q_2	q_3	sum
p_1	0.2819765	0.2251363	0.2251363	0.7322492
p_2	1.070980	0.8915543		1.962535
p_3	1.175023	0.7520718		1.927075
p_4	1.068817	0.6692469		1.738064
p_5	0.9581999	0.4148191		1.373019
p_6	1.070980	0.8915543		1.962535
p_7	1.018655	1.040552		2.059208

表4．h＝0．01に対する重複度（続き）

	q_1	q_2	q_3	sum
p_8	0.6562045			0.6562045
p_9	0.6462901	0.7513322	0.1626404	1.560263
p_{10}	0.9581999	0.4148191		1.373019
p_{11}	0.6562045			0.6562045
total				16.00039

表5．h＝0．009に対する重複度

	q_1	q_2	q_3	sum
p_1	0.2761374	0.2173885	0.2173885	0.7109143
p_2	1.069479	0.8936323		1.963111
p_3	1.171271	0.7577311		1.929002
p_4	1.067179	0.6765974		1.743777
p_5	0.9581854	0.4267213		1.384907
p_6	1.069479	0.8936323		1.963111
p_7	1.018324	1.039473		2.057797
p_8	0.6434040			0.6434040
p_9	0.6576132	0.7607113	0.1574934	1.575818
p_{10}	0.9581854	0.4267213		1.384907
p_{11}	0.6434040			0.6434040
total				16.00015

表6．hに対する重複度

h	0.01	0.0095	0.001	0.00095
重複度	16.00039	16.00015	15.90651	15.90815

例題3．4変数3次の連立代数方程式の重複度

$$f_1=u^3-u^2x-u^2-uxz+ux+uyz-uz^2+x^3-x^2y-x^2z+xy-xz-y^3-y^2-yz^2+2yz$$

$$f_2=-u^3-u^2x+ux^2+ux+uy^2+uy-uz+x^3-x^2y-xy^2+xy-xz^2-y^2z-yz^2+yz$$

$f_3=u^3-u^2x-u^2y+u^2z-ux^2-uy^2+uz^2+uz-x^2-xy^2+xyz+xy+xz^2+xz+y^3-y^2$
$+yz^2-z^2$

$f_4=u^3+u^2y-u^2-ux^2-uxy+uxz+ux+uy^2+uyz+uy-uz^2+x^3-x^2y+x^2+xy^2-xyz$
$+xy+2xz^2+xz+y^3+yz^2+z^3+z^2$

の根（0，0，0）の重複度を求める。各hに対するp点とq点の関係は表7，8のようになる。これより合計を求めれば重複度が得られる。しかし、この場合表7，8でわかるようにhを変えた時の重複度がかなり変化している。表7の場合では20と見積もれ、表8の場合は19と見積もれる。このように重複度が変化する場合には、すでに述べた方法により重複度を修正する必要がある。これらのことをまとめたものを表9に示した。

これよりわかるように、この問題の重複度は16になっている。なお計算時間は各hに対して約27秒であった。

表7．h＝0．002に対する重複度

	q_1	q_2	sum
p_1	1.287237	1.287237	2.574474
p_2	1.137765	1.164392	2.302157
p_3	1.121416	1.132351	2.253766
p_4	0.6508930	0.6757628	1.326656
p_5	0.7616134	0.7884581	1.550072
p_6	0.6344861	0.6889459	1.323432
p_7	0.7616134	0.7884581	1.550072
p_8	0.6344861	0.6889459	1.3234325
p_9	1.137765	1.164392	2.302157
p_{10}	1.121416	1.132351	2.253766
p_{11}	0.6508930	0.6757628	1.3266565
total			20.08664

表８．ｈ＝０．０００２に対する重複度

	q_1	q_2	sum
p_1	1.208921	1.208921	2.417842
p_2	0.6967755	0.7028556	1.399631
p_3	1.100812	1.119939	2.220751
p_4	1.088606	1.096654	2.185260
p_5	0.6065811	0.6348413	1.238422
p_6	0.6027386	0.6349094	1.237648
p_7	0.6967755	0.7028556	1.399631
p_8	0.6027386	0.6349094	1.2376485
p_9	1.100812	1.119939	2.220751
p_{10}	0.6065811	0.6348413	1.238422
p_{11}	1.088606	1.096654	2.1852605
total			18.98127

表９．ｈに対する重複度

h	0.002	0.001	0.0002	0.0001
重複度	20.08664	19.67618	18.89127	18.75687
修正重複度	15.9961		15.9995	

例題４．４変数４次の連立代数方程式の重複度

$$f_1=-u^4-u^3x+u^3y-2u^3z-2u^3-2u^2x^2+2u^2xy-u^2xz-u^2x-u^2y^2+2u^2yz+2u^2y$$
$$-u^2z^2+u^2z+2u^2+2ux^3+ux^2y-2ux^2z+ux^2+2uxy^2+uxyz+2uxy+uxz^2+uxz$$
$$+ux+2uy^3+uy^2z+2uy^2+uyz^2+2uyz-2uy-uz^3+uz^2-2uz-x^4+2x^3y-2x^3z$$
$$-2x^3+2x^2y^2+2x^2yz+2x^2y-x^2z^2-2x^2z+x^2-2xy^3-2xy^2z-xy^2-2xyz^2$$
$$-2xyz-xy+2xz^3-xz^2-2xz+y^4+y^3z-2y^2+2y^2z^2-2y^2z+2y^2-2yz^3-yz^2$$
$$+2yz-2z^4+z^3-2z^2$$

$$f_2=-2u^4-u^3x+u^3y+2u^3z-2u^3+u^2x^2+u^2xy+2u^2xz-2u^2x-2u^2y^2+u^2yz-u^2y$$
$$+2u^2z^2+u^2z+u^2+ux^3+ux^2y-ux^2z+ux^2-uxy^2-2uxyz-uxy-uxz^2+uxz-ux$$

$+2uy^3+2uy^2z+2uy^2-2uyz^2+2uyz-2uy+2uz^3+uz^2-2uz+x^4+x^3y+x^3z+x^3$
$-x^2y^2+2x^2yz+x^2y-2x^2z^2+2x^2z+2x^2+2xy^3+xy^2z+2xy^2+2xyz^2+xyz-xy$
$+xz^3-2xz^2-xz-2y^4+2y^3z+y^3+y^2z^2-y^2z-y^2-2yz^3+yz^2+yz+z^4+2z^3-2z^2$

$f_3=-2u^4+2u^3x+u^3y+u^3z-2u^3+2u^2x^2+u^2xy-2u^2xz-2u^2x-2u^2y^2+u^2yz-u^2y$
$-2u^2z^2+2u^2z+2u^2+2ux^3-ux^2y-2ux^2z+ux^2-2uxy^2+2uxyz-uxy+uxz^2$
$+2uxz+2ux+2uy^3+2uy^2z+uy^2-2uyz^2+uyz+2uy-uz^3-2uz^2+2uz-x^4+2x^3y$
$-2x^3z+2x^3+2x^2y^2+2x^2yz-x^2y+2x^2z^2+2x^2z+2x^2+xy^3+2xy^2z+2xy^2$
$-2xyz^2-2xyz+2xy-xz^3-2xz^2-xz+y^4+y^3z+2y^3+2y^2z^2+y^2z-y^2-yz^3$
$-2yz^2+2yz-z^4+2z^3+z^2$

$f_4=u^4-u^3x-u^3y-2u^3z-2u^3+2u^2x^2+2u^2xy+2u^2xz+2u^2x-2u^2y^2+u^2yz+2u^2y$
$+2u^2z^2+u^2z+u^2-2ux^3+ux^2y-ux^2z-2ux^2+uxy^2-uxyz-2uxy+uxz^2-2uxz$
$+2ux-uy^3+2uy^2z-uy^2-uyz^2-2uyz+2uy-2uz^3+uz^2-uz+2x^4+x^3y-x^3z-x^3$
$+x^2y^2+2x^2yz+2x^2y+x^2z^2-x^2z+2x^2+2xy^3-2xy^2z+xy^2+xyz^2-xyz-2xy$
$-xz^3-xz^2+xz+2y^4+y^3z+y^3-y^2z^2+2y^2z+2y^2-2yz^3+2yz^2-2yz-2z^4+z^3$
$+z^2$

の根（０，０，０）の重複度を求める。各ｈに対するｐ点とｑ点の関係は表１０，１１のようになる。これより合計を求めれば重複度が得られる。この場合も例３と同じように重複度の変化がある。したがって、重複度を修正する必要があり、これをまとめたものが表１２である。

これよりわかるように、この問題の重複度は１６になっている。なお計算時間は各ｈに対して約７１秒であった。

表１０．ｈ＝０．００１に対する重複度

	q_1	q_2	sum
p_1	0.8510826	0.9224833	1.773566
p_2	0.8776552	1.247624	2.125279
p_3	1.056422	0.8802057	1.936628

表１０．ｈ＝０．００１に対する重複度（続き）

	q_1	q_2	sum
p_4	0.9171965	1.065304	1.982501
p_5	0.8776552	1.247624	2.125279
p_6	1.056422	0.8802057	1.936628
p_7	1.065304	0.9171965	1.982501
p_8	0.8510826	0.9224833	1.773566
total			15.63595

表１１．ｈ＝０．０００１に対する重複度

	q_1	q_2	sum
p_1	0.8949680	0.9412092	1.836177
p_2	1.030914	0.9321221	1.963036
p_3	1.030914	0.9321221	1.963036
p_4	0.8949680	0.9412092	1.836177
p_5	0.9170158	1.173376	2.090392
p_6	0.9170158	1.173376	2.090392
p_7	1.021690	0.9533067	1.974997
p_8	1.021690	0.9533067	1.974997
total			15.729202

表１２．ｈに対する重複度

h	0.01	0.009	0.001	0.0009
重複度	15.63595	15.64137	15.72920	15.73280
修正重複度	15.87827		15.96883	

４．おわりに

連立代数方程式の交点での重複度を求めるのに、ゾイタンの法則を適用した。その結果今回の数値例に見られるように、十分信頼のおける結果を得た。

とくに、未知定数を除去するという考え方は、とても重要である。なぜならば、例3，4に見られるように、そのままでは重複度の値がどちらとも言えない場合に、重複度の値を正確に求めようとすれば、hの値をさらに小さくしなければならない。理論的には、h→0の極限をとる必要があり、表からもhが小さくなる方が真の重複度に近くなっていることがわかる。しかし、hの値を小さくするとp点を求めるときの近接根の分離が難しくなってくる。このような場合、hをさほど小さくしなくとも未知定数を除去する操作を行えば、十分精度の良い重複度が得られる。このことは、重複度を求めるときの精度をある意味で保証していると言える。

また、与えられた代数方程式を直接解こうとすれば$d_1d_2d_3d_4$本のパスを追跡しなければならない。しかし、ゾイタンの法則を適用すると、追跡しなければならないパスの本数を$d_2d_3d_4$本に減らすことができる。このことは、より多変数・高次元化したときに追跡しなければならないパスの数を減らし、したがって計算時間の短縮につながる。

参考文献

[1] J.G. Semple and L. Roth, Introduction to Algebraic Geometry, 1949, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford.

[2] Robert J. Walker, Algebraic curves, 1950, Springer-Verlag